

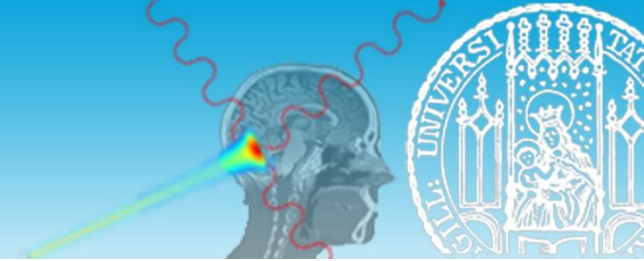


Physik für Mediziner

Flüssigkeiten

Jörg Schreiber

Material/Vorbereitung: Sabine Reinhardt



Versuch: Flüssigkeiten – FLU

→ Hydrostatik

→ Viskosität

→ Oberflächenspannung

→ Hydrodynamik

→ Kontinuitätsgleichung

→ Diffusion und Osmose

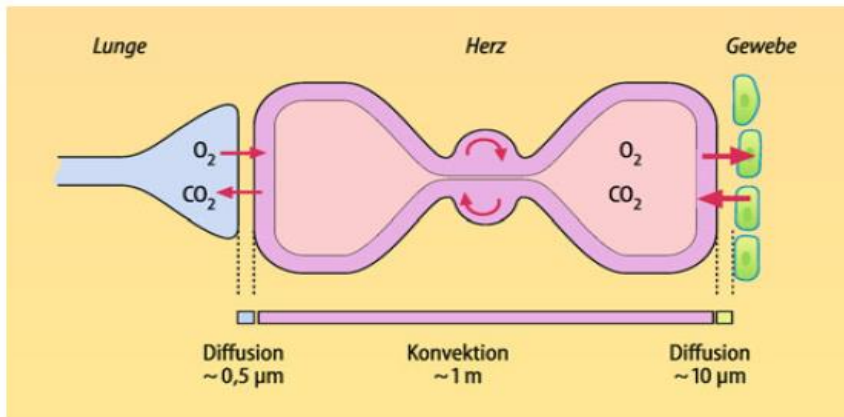


Abb. 28.1. Funktion des Kreislaufs als konvektives Transportsystem.

[1]

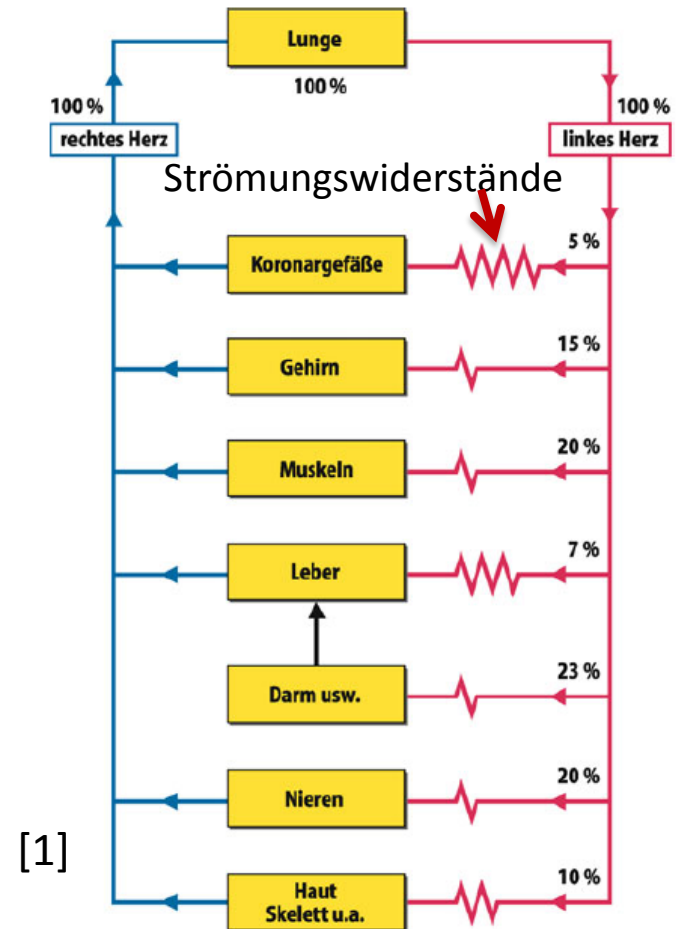
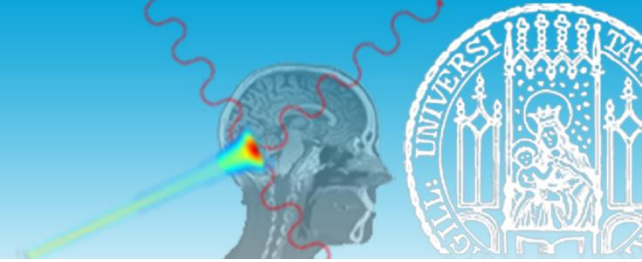


Abb. 28.2. Schema des Blutkreislaufes. Die Prozentzahlen geben die durch die verschiedenen Organgebiete fließenden Anteile des Herzzeitvolumens (HZV) während Körperruhe an. Die Verteilung des HZV auf die verschiedenen Organgebiete wird dabei von der Größe der regionalen Strömungswiderstände (symbolisiert durch die Länge der *gezackten Linie*) der einzelnen parallel geschalteten Organgebiete bestimmt



- **Ruhende, inkompressible Flüssigkeiten**
- Beschreibung der Druck- und Kräfteverteilung
 - Druck p
 - Kraft F

(Reale) Flüssigkeit

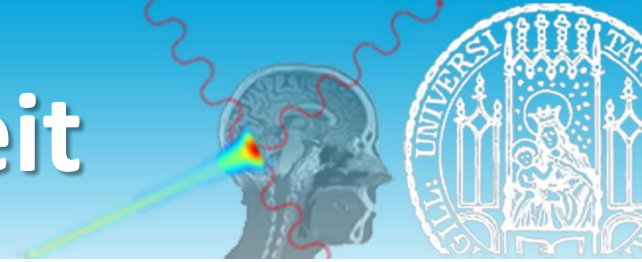
- Volumen V
- Masse m
- Dichte ρ

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{m}{V}$$

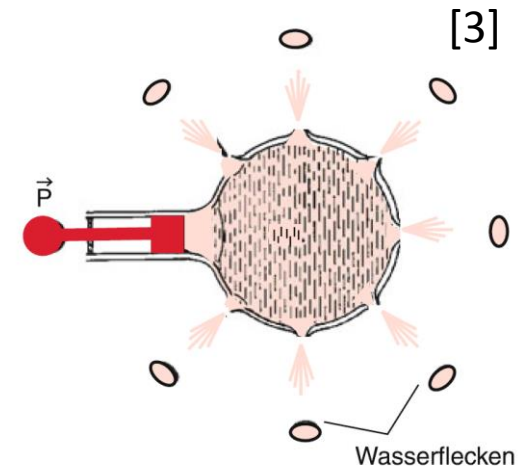
→ *inkompressibel: $\rho = \text{konstant}$*

- Viskosität η

Ideale Flüssigkeit



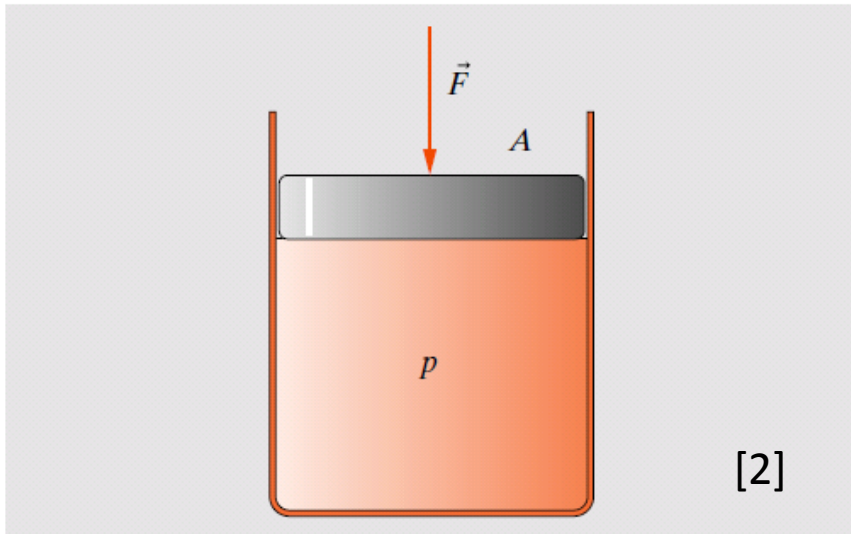
- Keine Reibung ($\eta = 0$)
- Keine Oberflächeneffekte



⇒ **Moleküle** innerhalb der Flüssigkeit sind **frei verschiebbar**

⇒ **Konstanter Druck** im gesamten Volumen





Schwerelose Flüssigkeit in einem Behälter, auf die ein Stempel (Fläche A) mit der Kraft F drückt. Der Stempeldruck wirkt gleichmäßig in alle Richtungen.

Der Druck p ist definiert als Quotient der Kraft F die senkrecht auf eine Fläche A einwirkt.

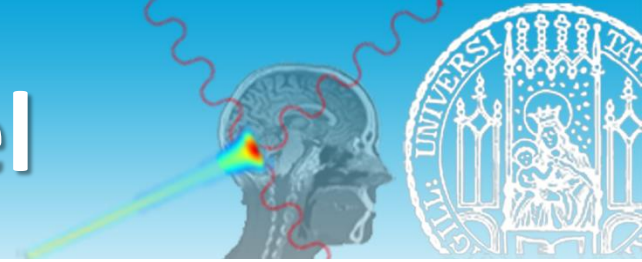
$$p = \frac{F}{A}$$

$$[p] = \text{N/m}^2 = \text{Pa (Pascal)}$$

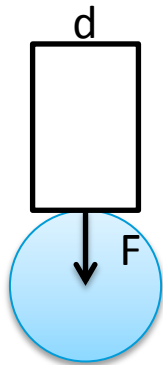
Weitere Druckeinheiten (am Beispiel Normaldruck):

$$10^5 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa} = 1000 \text{ hPa} = 1 \text{ bar} = 750 \text{ mm Hg}$$

Rechenbeispiel



Bei der Applanationstonometrie wird der intraokulare Druck gemessen. Ein planer Messkörper wird dazu soweit mit der Hornhaut in Kontakt gebracht, dass eine Fläche von ca. 3 mm Durchmesser abgeplattet wird. Der Anpressdruck entspricht dann dem intraokularen Druck. Welche Kraft wirkt auf den Messkörper, wenn ein intraokularer Druck von 10 mmHg gemessen wird?



Die Anpressfläche A kann als Kreis mit Durchmesser $d = 3 \text{ mm}$ angenähert werden.

$$A = \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi \cdot \frac{9}{4} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

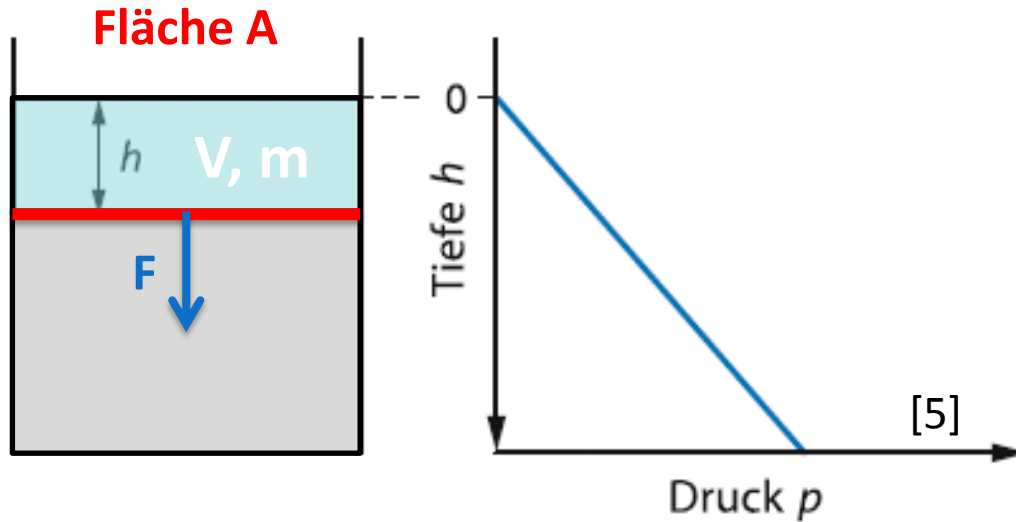
Die Kraft ergibt sich als Produkt von Druck (10 mmHg = 1,33 kPa) und Fläche:

$$F = p \cdot A = 1.33 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot \frac{9}{4} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 9,4 \text{ mN}$$



■ **Abb. 17.1.** Applanationstonometrie. Der Patient sitzt an der Spaltlampe. Das Messkörperchen wird nach Tropfanästhesie auf die Hornhaut aufgesetzt und die Federkraft des Instruments so eingestellt, dass diese dem Augeninnendruck entspricht. Die Abplattung der Hornhautoberfläche wird mit dem Spaltlampenmikroskop durch das transparente Messkörperchen kontrolliert

Schweredruck



In der Tiefe h wirkt auf die Fläche A durch die darüber liegende Flüssigkeit mit Volumen V und Masse m die Gewichtskraft F .

Es gilt:

$$F = m \cdot g$$

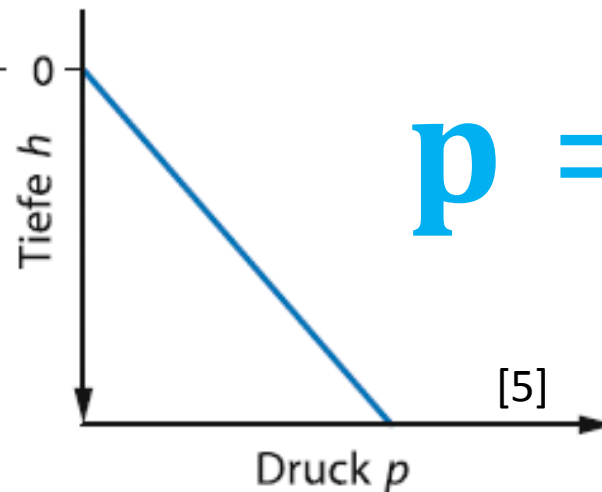
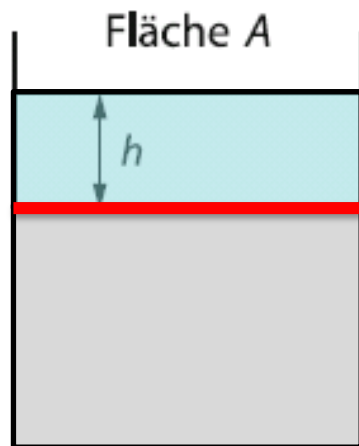
Die Masse kann mittels Volumen $V = Ah$ und Dichte ρ der Flüssigkeit ausgedrückt werden

$$F = V \cdot \rho \cdot g = A \cdot h \cdot \rho \cdot g \quad \rightarrow \quad p = \frac{F}{A} = h \cdot \rho \cdot g$$

Schweredruck

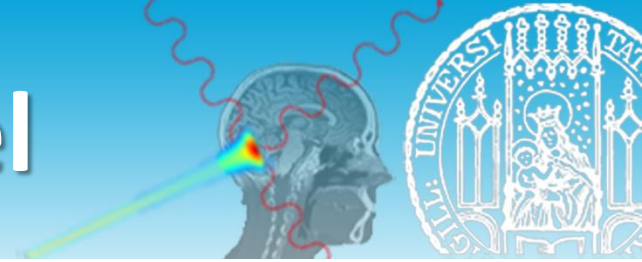


Bei einer **inkompressiblen Flüssigkeit**, d.h. einer Flüssigkeit, bei der sich die Dichte ρ nicht ändert, steigt der **Schweredruck p** proportional mit der Wassertiefe an:



$$p = h \cdot \rho \cdot g$$

Rechenbeispiel



Wie groß ist der Schweredruck einer 14 m hohen Wassersäule?

Für den Schweredruck gilt: $p = h \cdot \rho \cdot g$

$$h = 14 \text{ m}$$

$$\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$p = 14 \text{ m} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Einheitenumrechnung:

$$1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1400 \text{ hPa} = 1,4 \text{ bar} = 1050 \text{ mmHg}$$

Hydrostatisches Paradoxon

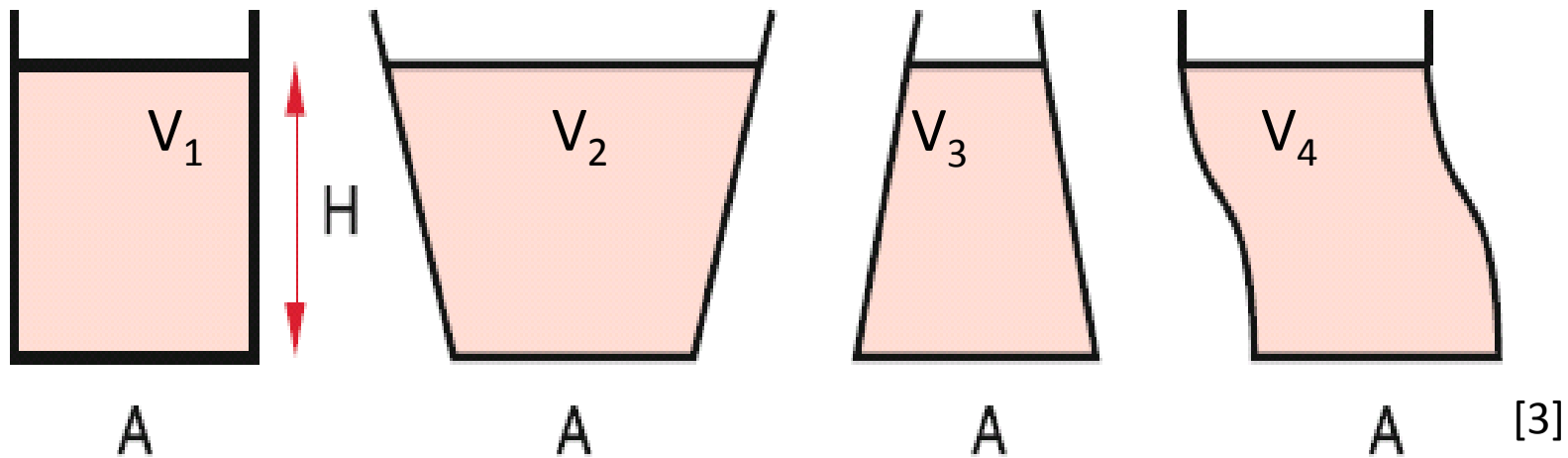


Abbildung 6.26 Hydrostatisches Paradoxon: Der Druck auf die Bodenfläche eines Gefäßes ist bei gleicher Füllhöhe H für alle Gefäße gleich

Kommunizierende Röhren



Kommun.
Röhren

Hydrostatischer Druck



Stehender Mensch:

Hauptgefäßbahn parallel zur Erdanziehung

→ **Hydrostatischer Druck hoch**

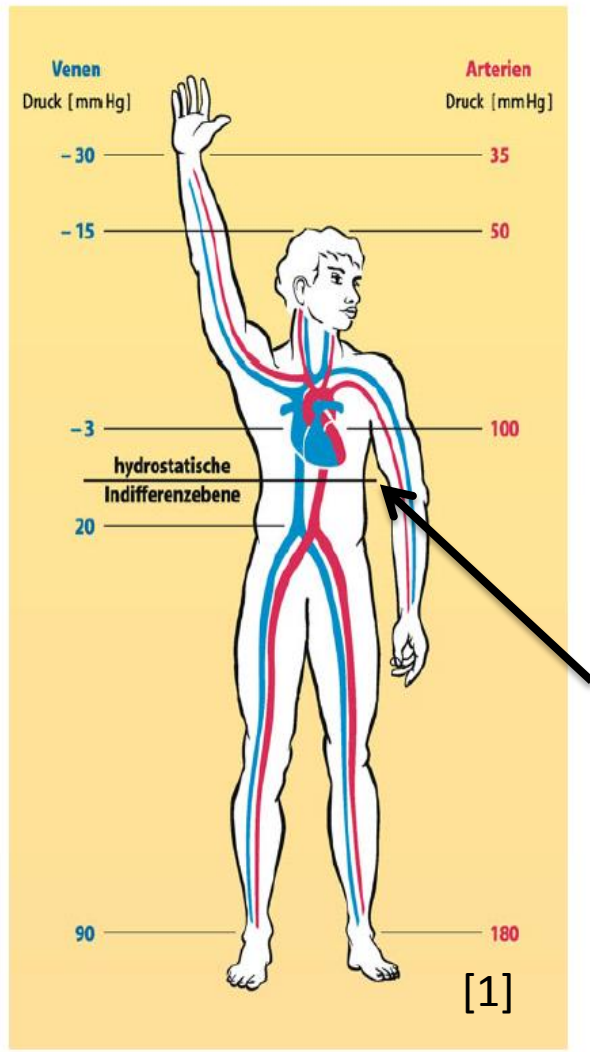
Liegender Mensch:

Hauptgefäßbahn senkrecht zur Erdanziehung

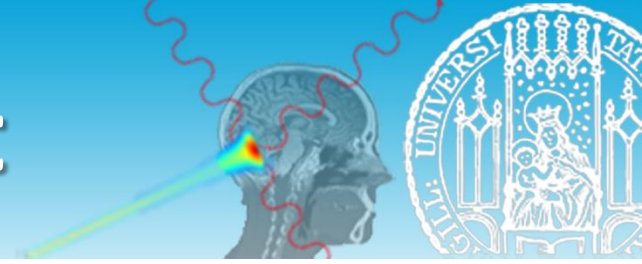
→ **Hydrostatischer Druck gering**

Hydrostatische Indifferenzebene:

Ort im Gefäßsystem, an dem sich Druck und Gefäßdurchschnitt beim Lagewechsel nicht ändern ($p = 11 \text{ mmHg}$)

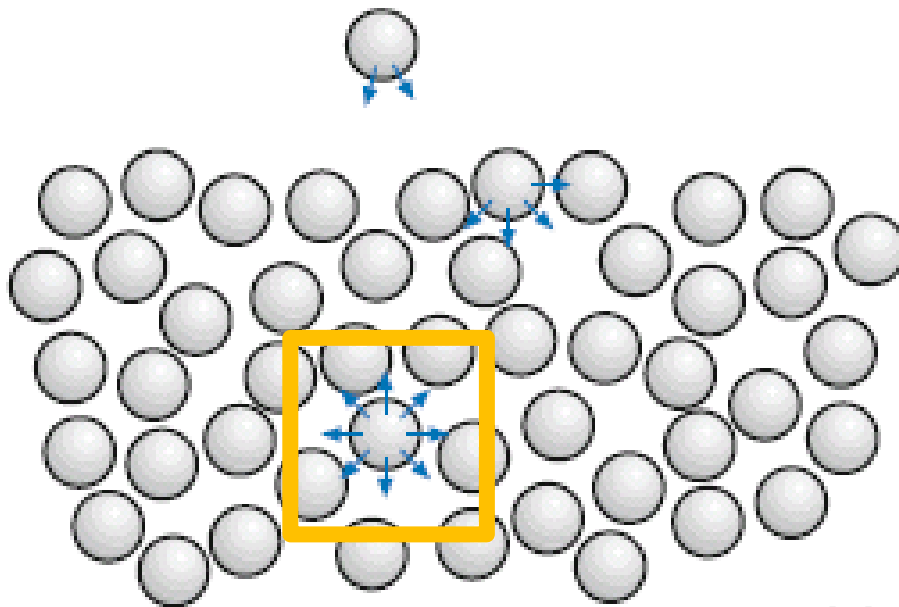


Kohäsionskraft



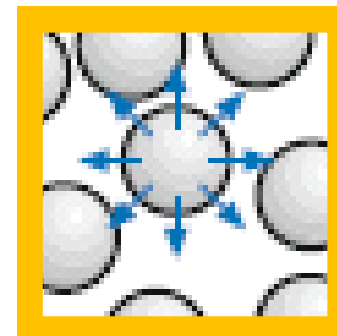
Innerhalb des Volumens einer Flüssigkeit sind die Moleküle der Flüssigkeit ständig in Bewegung.

Kohäsion bezeichnet die **kurzreichweitige Anziehungskraft** zwischen den Molekülen und bewirkt den Zusammenhalt der Flüssigkeit.



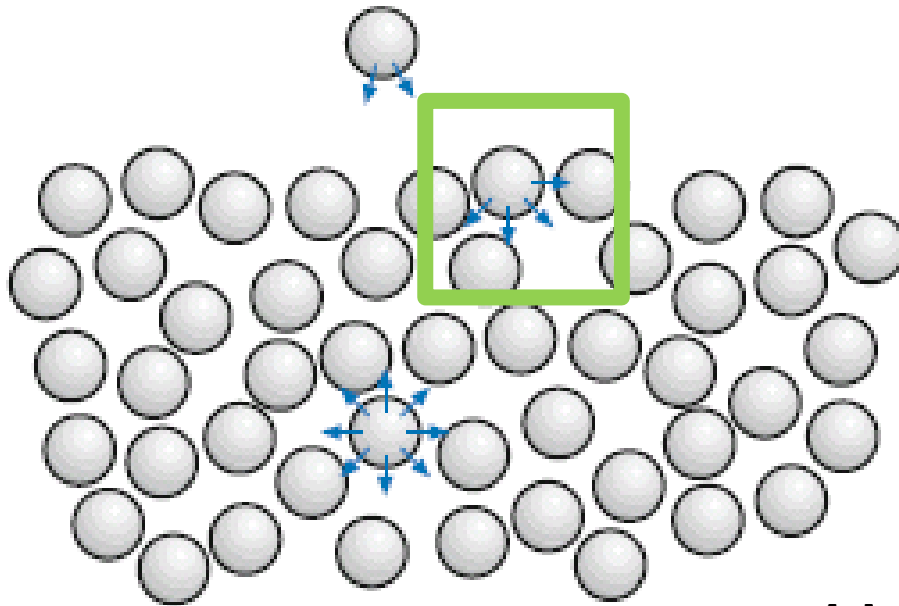
[5]

Molekül im Inneren:
→ Kräftegleichgewicht



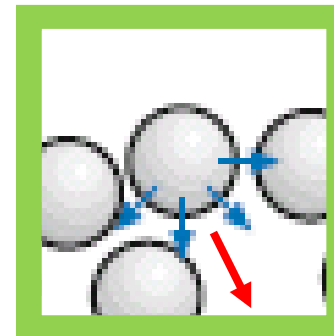
$$F_{\text{ges}} = 0$$

Kohäsionskraft



[5]

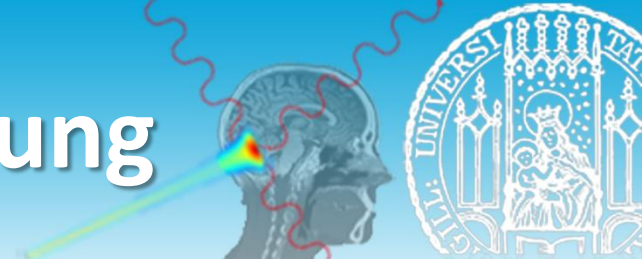
Molekül an der Grenzfläche:
→ **resultierende Kraft** durch
Anziehung der Moleküle im
Inneren



$$F_{\text{ges}} \neq 0$$

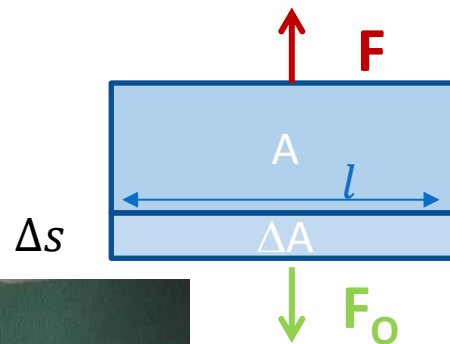
Um ein Molekül aus der Flüssigkeit zu entfernen muss Arbeit an dem System verrichtet werden.

Oberflächenspannung



Zieht man den Bügel der Länge l mit der Kraft F nach oben, so vergrößert sich zunächst die Flüssigkeitsoberfläche, bis der Flüssigkeitsfilm reißt ($F > F_0$)

Lenard-
Bügel



Durch die Einwirkung der Kraft F wird die Fläche um $\Delta A = l \cdot \Delta s$ vergrößert. Dabei wird die Arbeit $W = F \cdot \Delta s$ verrichtet
 F_0 Anziehungskraft der Moleküle



Die **Oberflächenspannung** σ ist definiert als Kraft pro Länge (des Kontaktes), die notwendig ist, um den Flüssigkeitsfilm zusammenzuhalten

[8]

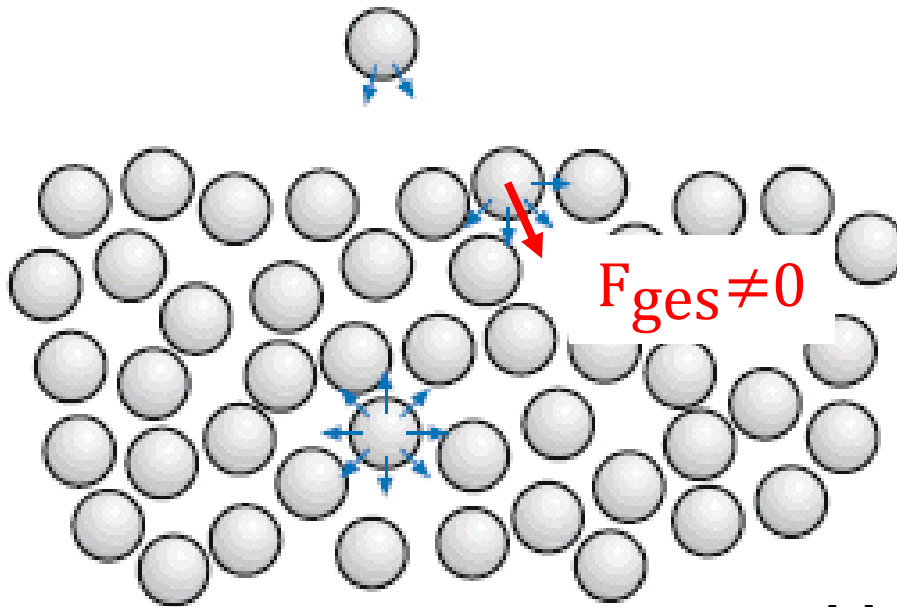
$$\sigma = \frac{F}{l}$$

$$[\sigma] = \frac{N}{m}$$

Oberflächenspannung



Zur **Vergrößerung** der Oberfläche muss Arbeit verrichtet werden, d.h. Energie zugeführt werden.



[5]

Erinnerung:
Arbeit = Kraft · Weg

Die Oberflächenspannung kann daher auch als Energie pro Fläche ausgedrückt werden:

$$\sigma = \frac{W_A}{A} \quad [\sigma] = \frac{J}{m^2}$$

Die Oberflächenspannung spielt insbesondere bei kleinen Oberflächen eine besondere Rolle.

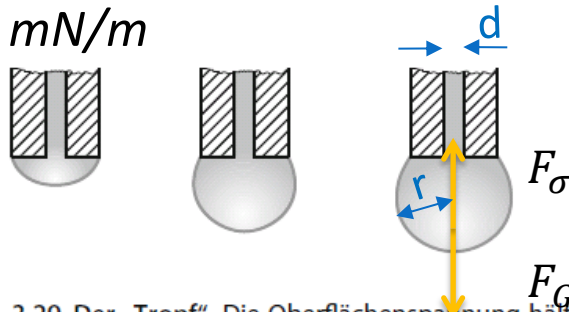
Rechenbeispiel



Wie groß ist der Radius eines Wassertropfens wenn er von einem Rohr mit Rohrdurchmesser $d = 1 \text{ mm}$ abfällt.

Oberflächenspannung Wasser:

$$\sigma = 72,75 \text{ mN/m}$$



[5]

■ Abb. 3.29. Der „Tropf“. Die Oberflächenspannung hält einen Tropfen am Röhrchen fest, weil dieser beim Abfallen zunächst zusätzlich Oberfläche für einen Zylinder vom Röhrchendurchmesser schaffen müsste

$$F_\sigma = \sigma \cdot \pi d$$

$$F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \cdot g$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma \cdot d}{\rho \cdot g}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{72,75 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 10^{-3} \text{m}}{1000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1,76 \text{ mm}$$

Klinik

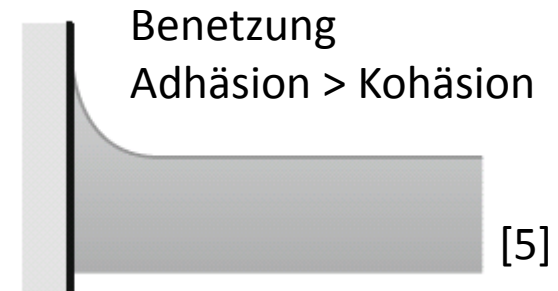
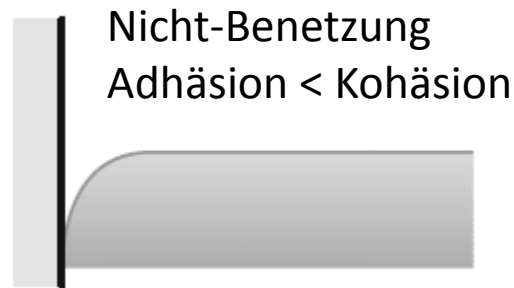
Der Patient am „Tropf“. Bei Patienten, die „ihre Tropfen nehmen“, dient die Oberflächenspannung zur Dosierung von Medikamenten. Dabei verlässt man sich darauf, dass alle vom Schnabel der Flasche fallenden Tropfen zumindest so ungefähr die gleiche Größe haben. In manchem Mediziner-Praktikum wird so die Oberflächenspannung bestimmt (siehe Kasten). Die Tropfengröße hängt auch entscheidend vom Durchmesser des Rohres ab, aus dem die Flüssigkeit tropft. Eine Tropfflasche mit beschädigtem Schnabel dosiert falsch.

Der Radius des Wassertropfens beträgt 1,76 mm.

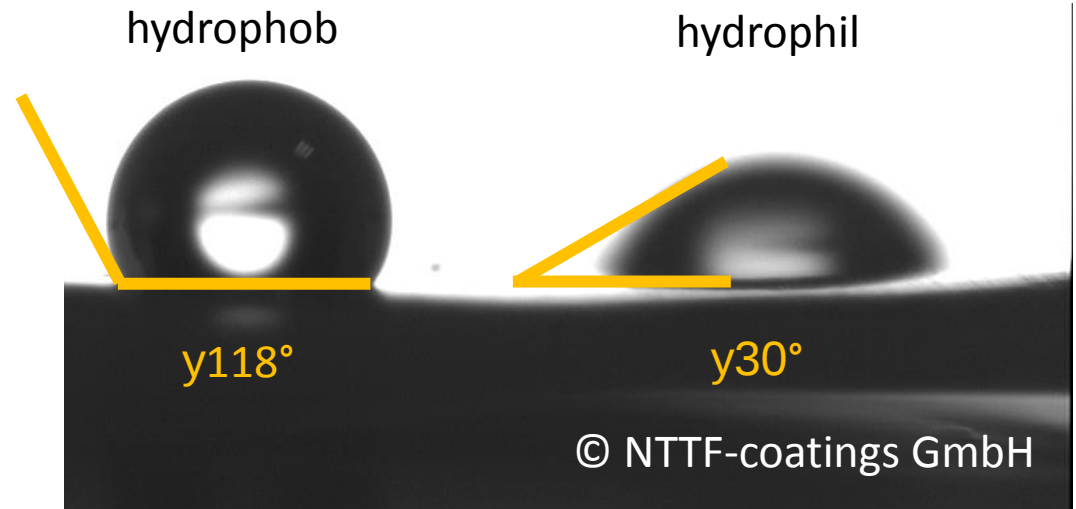
Adhäsion



Adhäsion bezeichnet die Kraft zwischen Molekülen einer Flüssigkeit und einem Festkörper (z.B. Gefäßwand).



Der Kontaktwinkel ist ein Maß für die Benetzungsfähigkeit



Kapillarität



Eine benetzende Flüssigkeit (Adhäsion > Kohäsion) steigt in einer dünnen Kapillare auf.

Wie hoch kann die Flüssigkeit steigen?
Gewichtskraft der Flüssigkeit in der Kapillare

$$F_G = m \cdot g = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \rho \cdot g$$

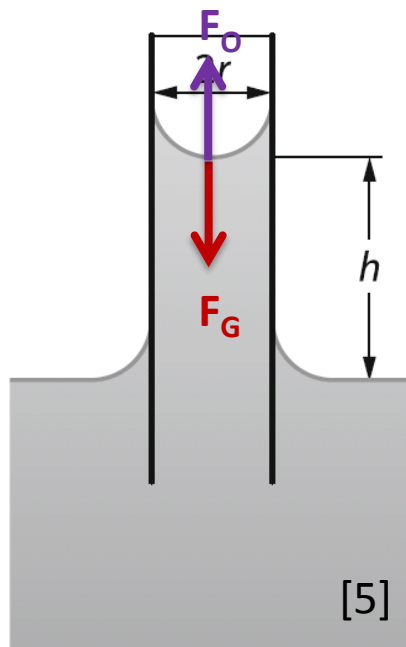
Kraft durch die Oberflächenspannung

$$F_O = 2\pi r \cdot \sigma$$

Kräftegleichgewicht → maximale Höhe

$$2\pi r \cdot \sigma = \pi r^2 \rho h g$$

$$h = \frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot r \cdot g}$$

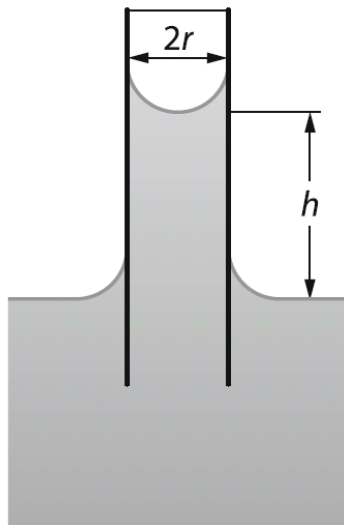


Kapillaranhebung

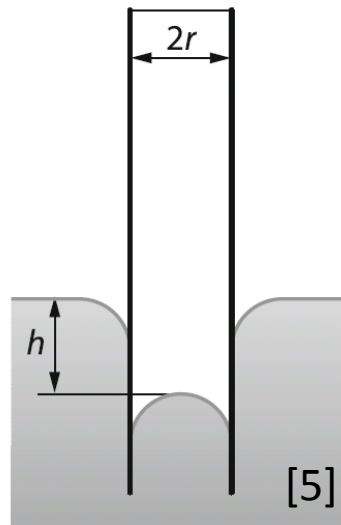
Kapillarität



Eine benetzende Flüssigkeit steigt in einer dünnen Kapillare auf. Bei einer nicht benetzenden Flüssigkeit kommt es dagegen zur sogenannten Kapillardepression, d.h. der Flüssigkeitsstand sinkt ab.



Kapillaranhebung



Kapillardepression

Höhe des Flüssigkeitsstandes in der Kapillare:

$$h = \frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot r \cdot g}$$

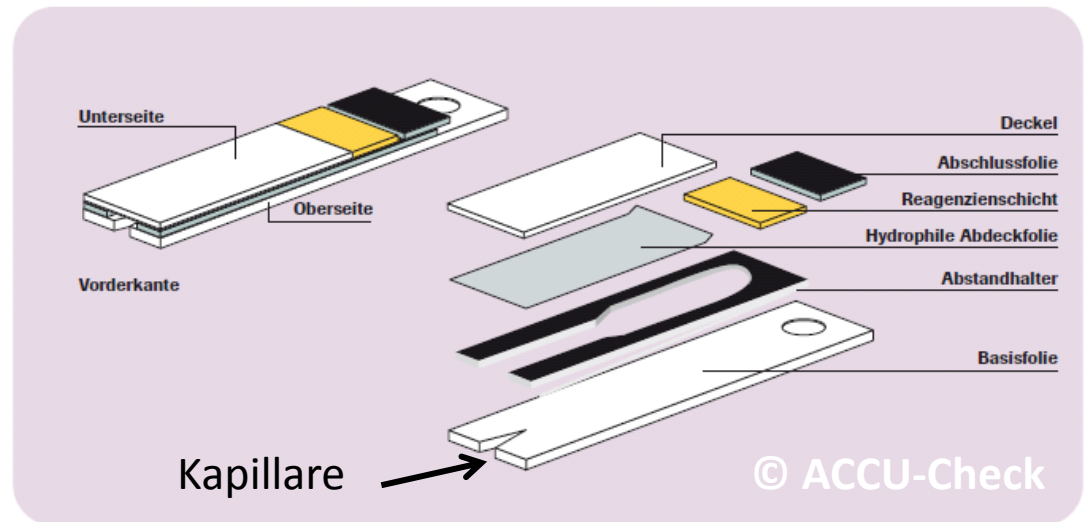
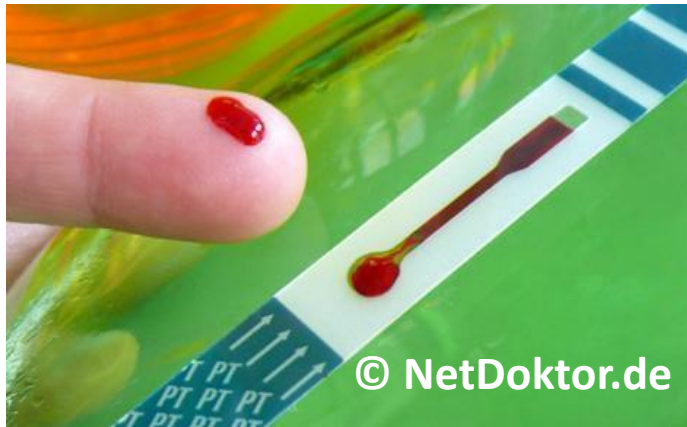
Je dünner der Durchmesser (=2r) der Kapillare desto größer der Effekt!

Kapillarität

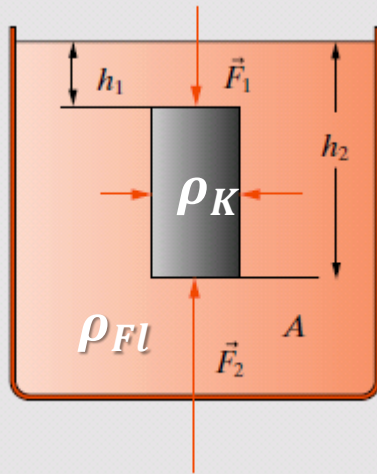


Anwendung: Diabetes-Teststreifen

Das Blut wird durch die Kapillarwirkung in den Teststreifen gezogen



Auftrieb



[2]

Resultierende Auftriebskraft auf den Körper durch das Medium:

$$F_A = F_2 - F_1$$

$$F_1 = \rho_{Fl} \cdot A \cdot h_1 \cdot g$$

$$F_2 = \rho_{Fl} \cdot A \cdot h_2 \cdot g$$

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot A \cdot (h_2 - h_1) \cdot g$$

Kugeln
und
Taucher

Archimedisches Prinzip:

Der Auftrieb eines Körpers in einem Medium ist gleich der Gewichtskraft des von dem Körper verdrängten Mediums.

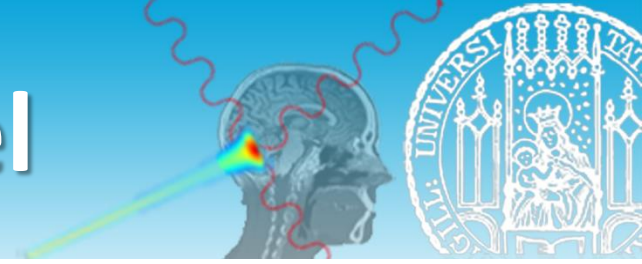
$$F_A = \rho_{Fl} \cdot V_K \cdot g$$

Ob ein Körper schwimmt hängt vom Verhältnis der Dichten Körper/Medium ab:

$\rho_K > \rho_{Fl}$ Der Körper geht unter

$\rho_K < \rho_{Fl}$ Der Körper schwimmt

Rechenbeispiel



Wie ändert sich die Auftriebskraft, wenn ich den Radius eines kugelförmigen Gegenstandes, der sich in Wasser befindet, verdreifache?

Die Auftriebskraft entspricht der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge und hängt damit vom Volumen des Gegenstandes ab.

Wird der Kugelradius verdreifacht, so wird das Volumen ($\propto r^3$) um einen Faktor $3^3 = 27$ erhöht.

Die Auftriebskraft erhöht sich damit ebenfalls um einen Faktor von 27.

Rechenbeispiel



Aräometer
und Kugel
(H₂O, NaCl)

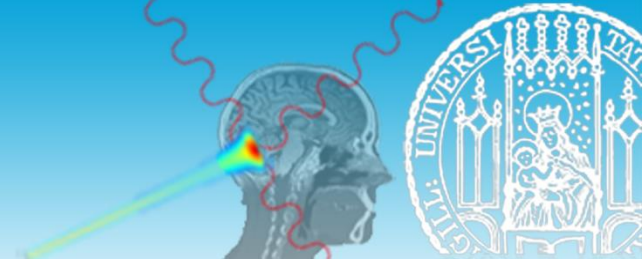
Die Dichte von Eis beträgt 917 kg/m^3 ,
die von von Wasser 1000 kg/m^3 .
Wieviel Prozent des Volumens des
Eisberges schaut aus dem Wasser
heraus?

$$V_{\text{unter}} \cdot \rho_{\text{Wasser}} \cdot g = V_{\text{ges}} \cdot \rho_{\text{Eis}} \cdot g$$

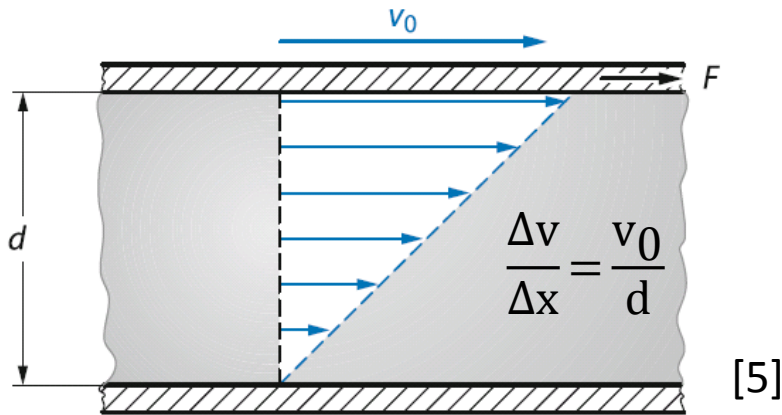
$$\frac{V_{\text{unter}}}{V_{\text{ges}}} = \frac{\rho_{\text{Eis}}}{\rho_{\text{Wasser}}}$$

$$\frac{V_{\text{unter}}}{V_{\text{ges}}} = 0,917$$

Nur 8,3 % des Eisbergvolumens schaut aus dem Wasser heraus.



Gedankenexperiment:



Durch die Adhäsion haftet die Flüssigkeit sowohl an der oberen und unteren Platte. Durch die Bewegung der oberen Platte entsteht ein lineares Geschwindigkeitsprofil.

Für Kraft, die aufgewandt werden muss um die Platte mit der Querschnittsfläche A und Geschwindigkeit v_0 zu bewegen, gilt

$$F \propto A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$[\eta] = \text{Ns/m}^2$$

Die **Viskosität η** ist ein Maß für die **innere Reibung einer Flüssigkeit**

Viskosität



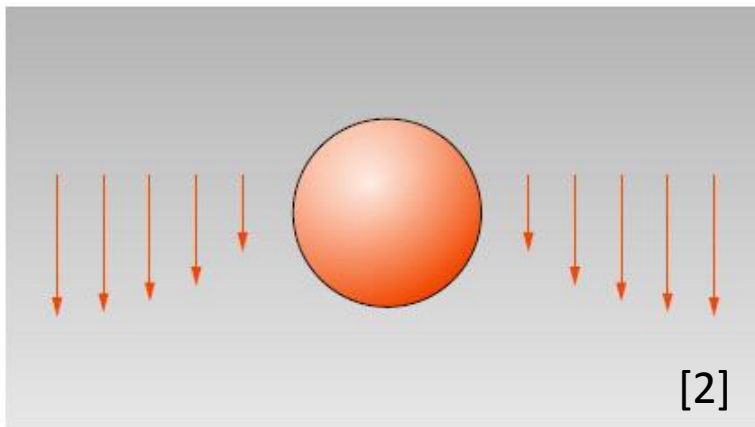
Viskosität (Zähigkeit) von Gasen und Flüssigkeiten bei $T = 20^\circ \text{C}$:

Stoff	$\eta / (\text{mPa} \cdot \text{s})$ [3]
Wasser	1,002
Benzol	0,65
Ethanol	1,20
Glyzerin	1480,0
Schweröl	660
Quecksilber	1,55
Luft (10^5 Pa)	$1,8 \cdot 10^{-2}$
Helium (10^5 Pa)	$1,9 \cdot 10^{-2}$

Die Viskosität ist eine materialspezifische Größe, die eine deutliche Temperaturabhängigkeit zeigt.

Mit zunehmender Temperatur nimmt die Viskosität ab.

$T / ^\circ \text{C}$	Zähigkeit $\eta(T) / (\text{mPa} \cdot \text{s})$ [3]	
	Wasser	Glyzerin
0	1,792	12 100
+20	1,002	1480
+40	0,653	238
+60	0,466	81
+80	0,355	31,8
+100	0,282	14,8

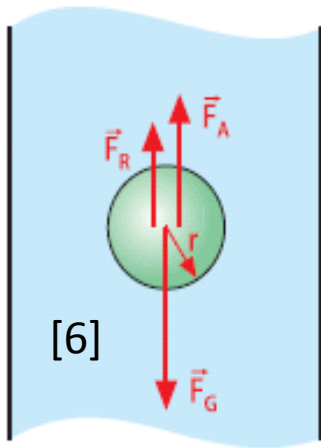


■ **Abbildung 3.46** Geschwindigkeitsprofil um eine Kugel, die von einer viskosen Flüssigkeit umströmt wird (schematisch)

Eine Kugel mit Radius (r) bewegt, sich mit der Geschwindigkeit (v) durch eine viskose (η) Flüssigkeit. Nach dem Stokesschen Gesetz gilt für die Reibungskraft

$$F_R = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$$

Beispiel: Stokes Gesetz



$$F_G = F_A + F_R$$

BEISPIEL

[2]

Sedimentation und Blutsenkung. Wie groß ist die konstante Sinkgeschwindigkeit (*Sedimentationsgeschwindigkeit*) v_s , die Kugeln in zähen Medien erreichen? Wie groß ist die Sinkgeschwindigkeit von roten Blutkörperchen (*Erythrozyten*, Dichte $\rho_E = 1,1 \text{ g/cm}^{-3}$, Radius $r = 2,8 \mu\text{m}$) in Blutplasma (Dichte $\rho_P = 1,03 \text{ g/cm}^{-3}$, $\eta = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}$)?

Gewichtskraft $F_G = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_e \cdot g$

Auftrieb $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_p \cdot g$

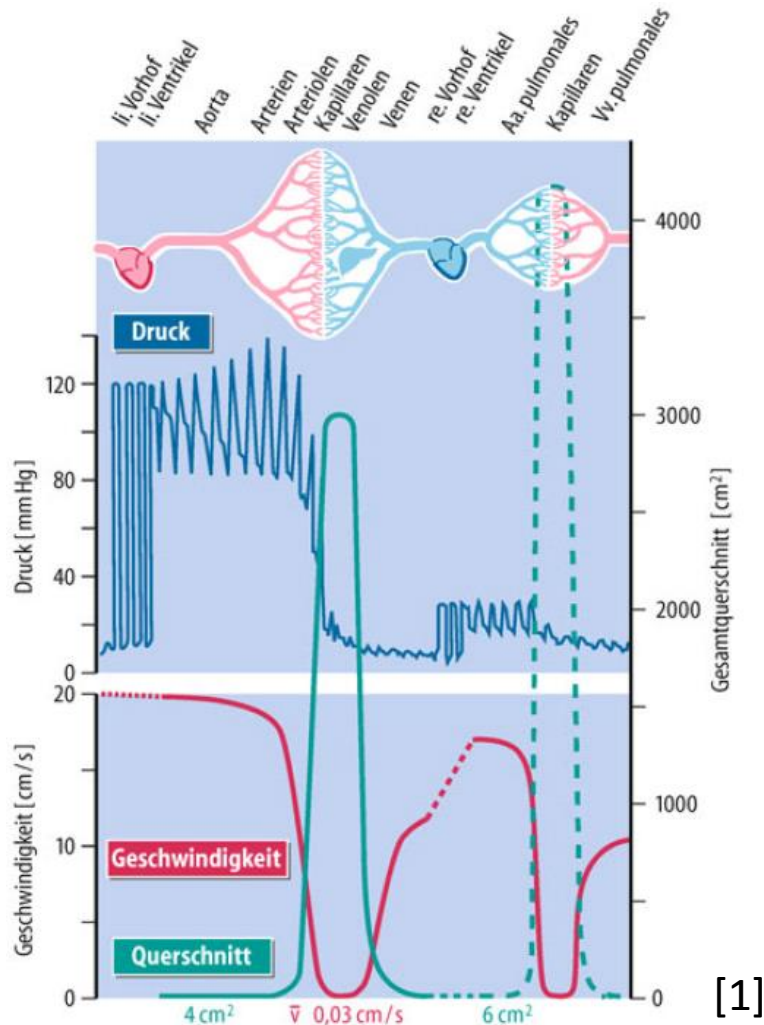
Reibung (Stokes) $F_R = 6\pi\eta r v_s$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_e \cdot g = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_p \cdot g + 6\pi\eta r v_s$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot (\rho_e - \rho_p) \cdot g = 6\pi\eta r v_s$$

$$v_s = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 (\rho_e - \rho_p) \cdot g}{\eta}$$

$$v_s = 0,068 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,5 \frac{\text{mm}}{\text{h}}$$



Strömungsmechanik Wasser:
Hydrodynamik

Strömungsmechanik des Blutes:
Hämodynamik

gleiche Grundprinzipien

aber:

nur bedingt laminar → gepulst (Herz)

Dehnung der Gefäßwände → Regulierung

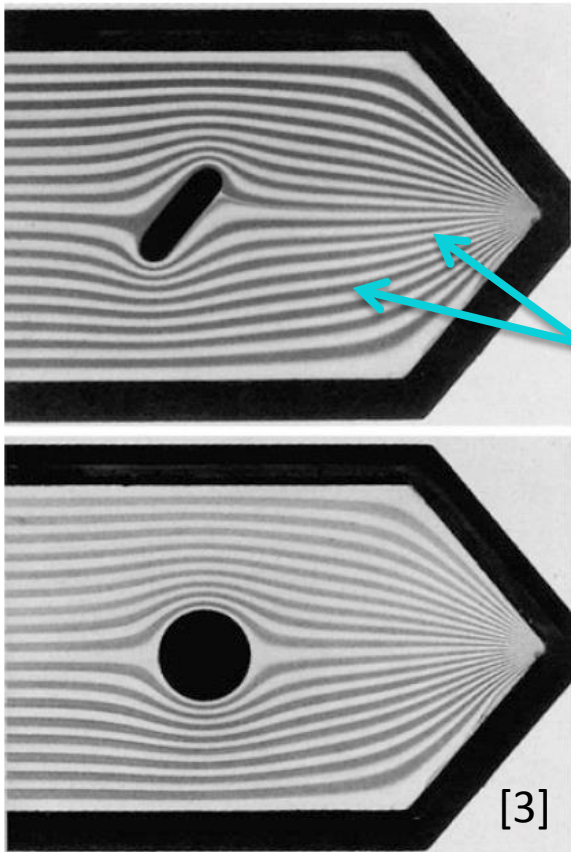
Hydrodynamik



Turbulente
/laminare
Strömung

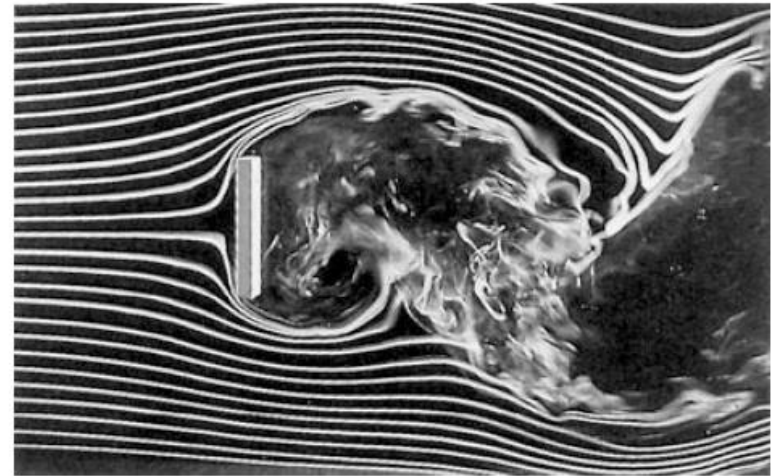


Laminare Strömung



Stromlinien
→ Schichten

Turbulente Strömung



[3]

Laminare Strömung:

Das Fluid strömt in einzelnen Schichten, die sich nicht miteinander vermischen.

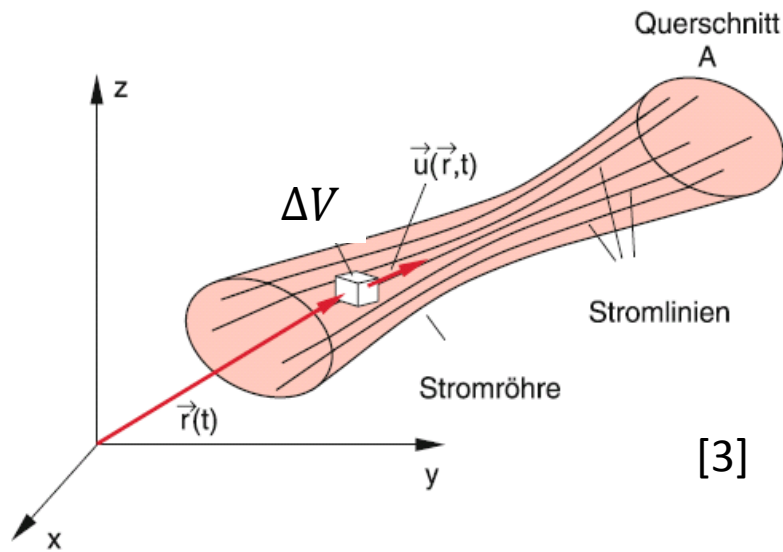
Turbulente Strömung:

Verwirbelungen und Querströmungen treten auf.

Volumenstromstärke



Die Volumenstromstärke ist ein Maß dafür, welches Flüssigkeits-**Volumen** in einer bestimmten **Zeit** durch ein Rohr fließt.



$$\text{Volumenstromstärke } I = \frac{\text{Volumen}}{\text{Zeit}}$$

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$[I] = \text{m}^3/\text{s}$$

Bei konstantem Rohrdurchmesser gilt:

$$I = A \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = A \cdot v$$

v : Strömungsgeschwindigkeit

Beispiele:

Aorta (Spitzenstromstärke bei Ruhe)

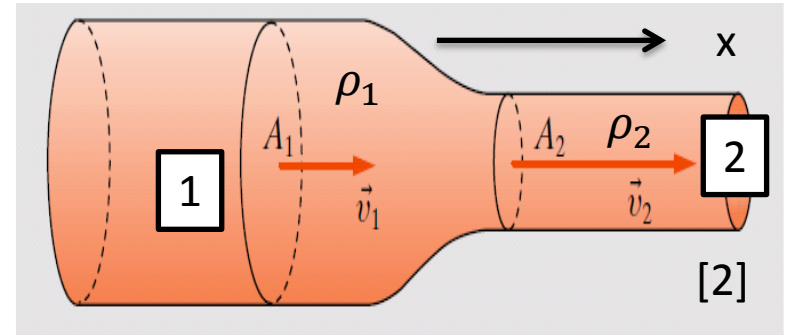
500-600 ml/s

Isar bei München

20m³/s



In der Zeit Δt fließt das Volumen ΔV_1 durch Rohrabschnitt 1. Mit diesem Volumenstrom $I_1 = \frac{\Delta V_1}{\Delta t}$ ist auch ein Massetransport verknüpft:



Inkompressible Flüssigkeit: $\rho = \rho_1 = \rho_2$

$$\boxed{1} \quad \frac{\Delta M_1}{\Delta t} = \rho \cdot \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \rho \cdot I_1 = \rho \cdot A_1 \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \rho \cdot A_1 \cdot v_1$$

Analog gilt für Rohrabschnitt 2:

$$\boxed{2} \quad \frac{\Delta M_2}{\Delta t} = \rho \cdot \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = \rho \cdot I_2 = \rho \cdot A_2 \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \rho \cdot A_2 \cdot v_2$$

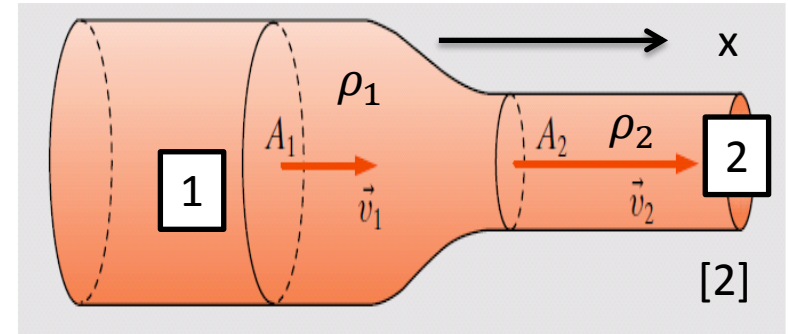


In einem Rohrabschnitten ohne Zu- und Abflüsse ist der Massetransport konstant.

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \textit{konstant}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta M_1}{\Delta t} = \frac{\Delta M_2}{\Delta t}$$

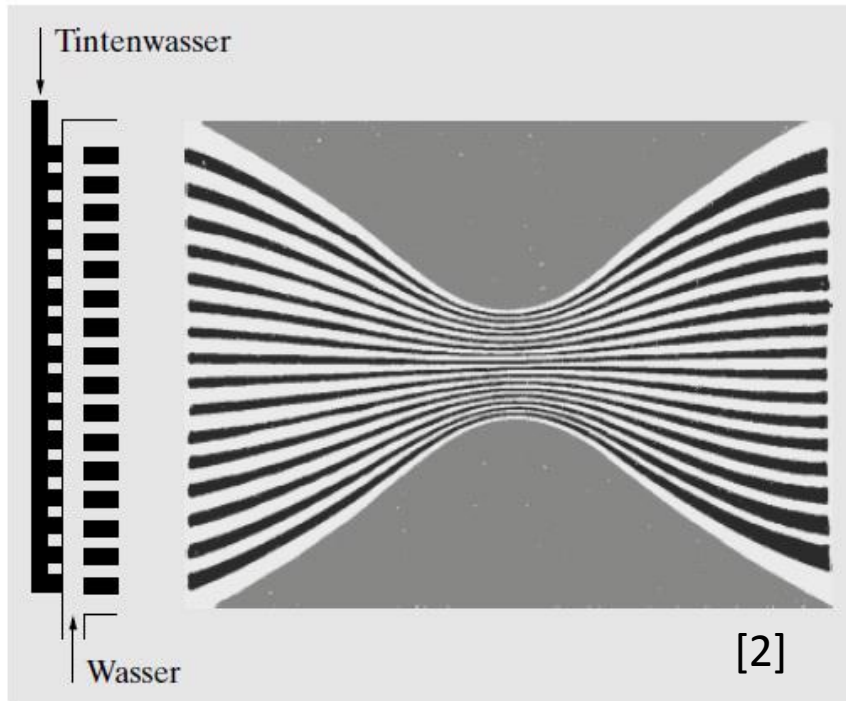
$$\rho \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho \cdot A_2 \cdot v_2$$



Inkompressible Flüssigkeit: $\rho = \rho_1 = \rho_2$

Kontinuitätsgleichung

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$



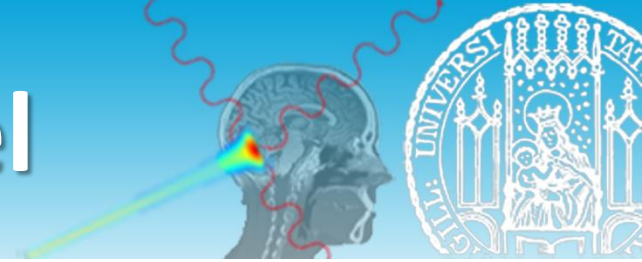
Die Dichte der Stromlinien symbolisiert die Geschwindigkeit.

Die Strömungsgeschwindigkeit in dem Rohrabschnitt mit der kleineren Querschnittsfläche ist höher als die in dem Rohrabschnitt mit der größeren Querschnittsfläche .

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Rechenbeispiel



Der Kolben einer Spritze mit Querschnittsfläche 1 cm^2 wird mit der Geschwindigkeit von 1 mm/s bewegt. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich eine wässrige Lösung durch eine Hohnadel mit innerem Durchmesser von $0,2 \text{ mm}$?

Es gilt die Kontinuitätsgleichung

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

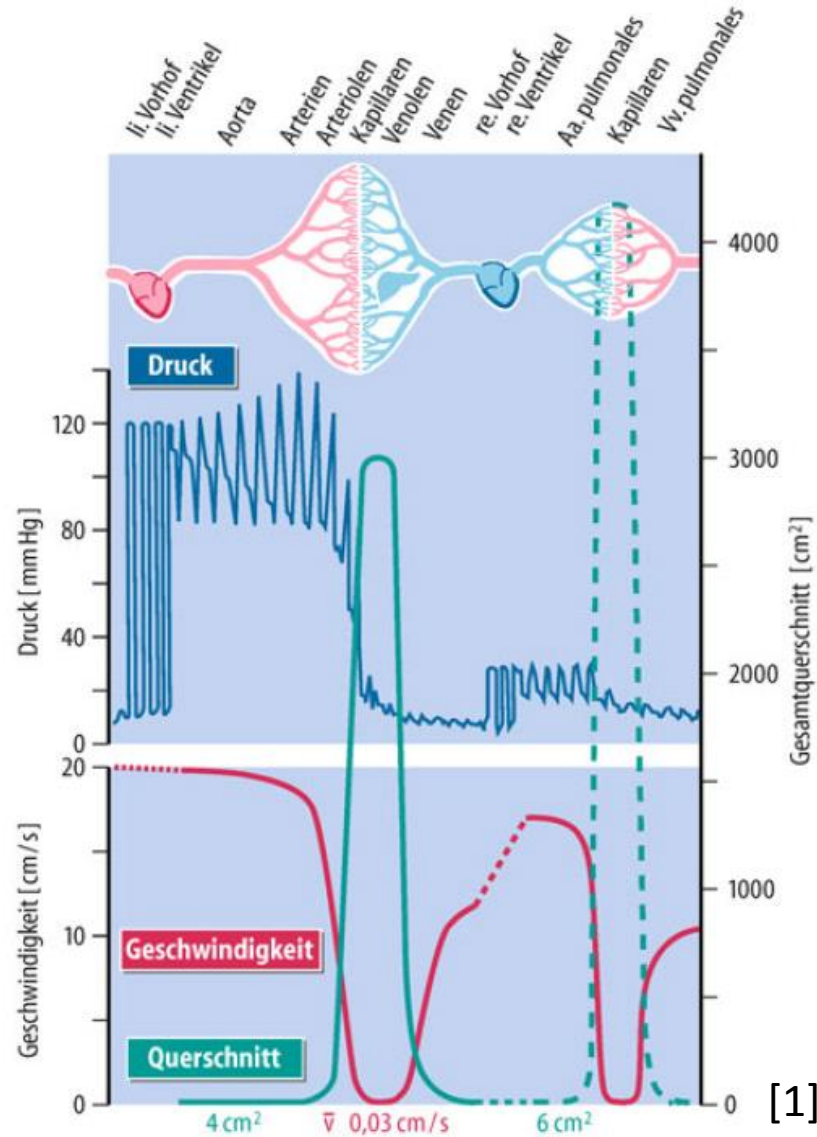
Querschnittsfläche der Hohnadel

$$A_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$V_2 = 3,2 \text{ m/s} = 11,5 \text{ km / h}$$

Kontinuitätsgleichung

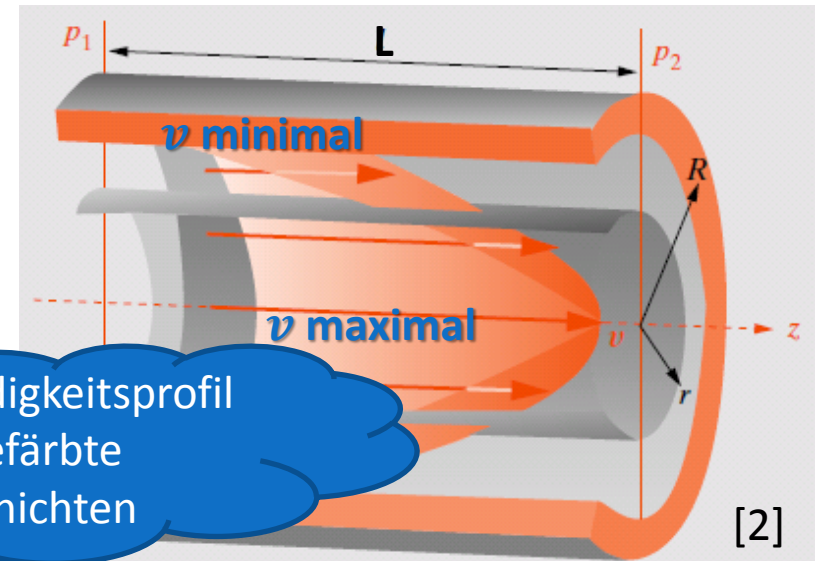


Laminare Strömung



Bei einer laminaren Strömungen sind die Reibungskräfte größer als deren beschleunigende Kräfte.

Die stationäre Strömung wird aufrecht erhalten, wenn die antreibende Kraft F_p , die aus dem Druckunterschied Δp resultiert, die Reibungskraft F_R kompensiert.



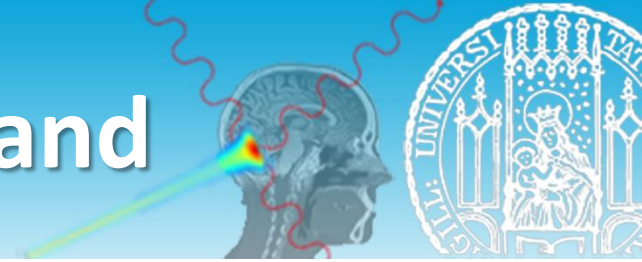
Geschwindigkeitsprofil
Versuch gefärbte
Glycerinschichten

Für die laminare Strömung ergibt sich ein **parabolisches Geschwindigkeitsprofil**:

$$\begin{array}{ll} r = R: & v = 0 \quad \text{minimal} \\ r = 0: & v = \frac{\Delta p}{4\eta L} R^2 \quad \text{maximal} \end{array}$$

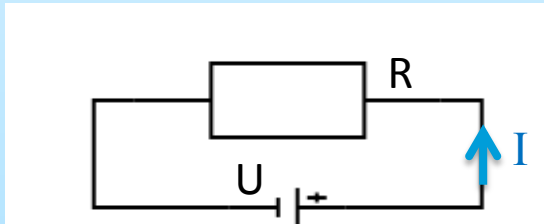
$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

Strömungswiderstand



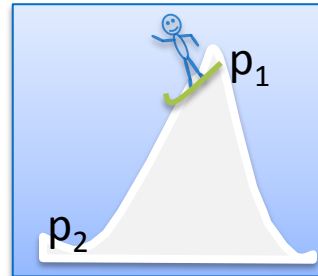
Erinnerung Elektrizitätslehre:

Damit ein elektrischer Strom fließen kann, muss eine Spannung an dem Stromkreis anliegen.



Bei vielen elektrischen Leitern ist der Strom, der durch den Leiter fließt zur angelegten Spannung proportional.

$$U = R \cdot I \quad \longrightarrow \quad R = \frac{U}{I}$$



Der Volumenstrom wird durch eine Druckdifferenz Δp angetrieben

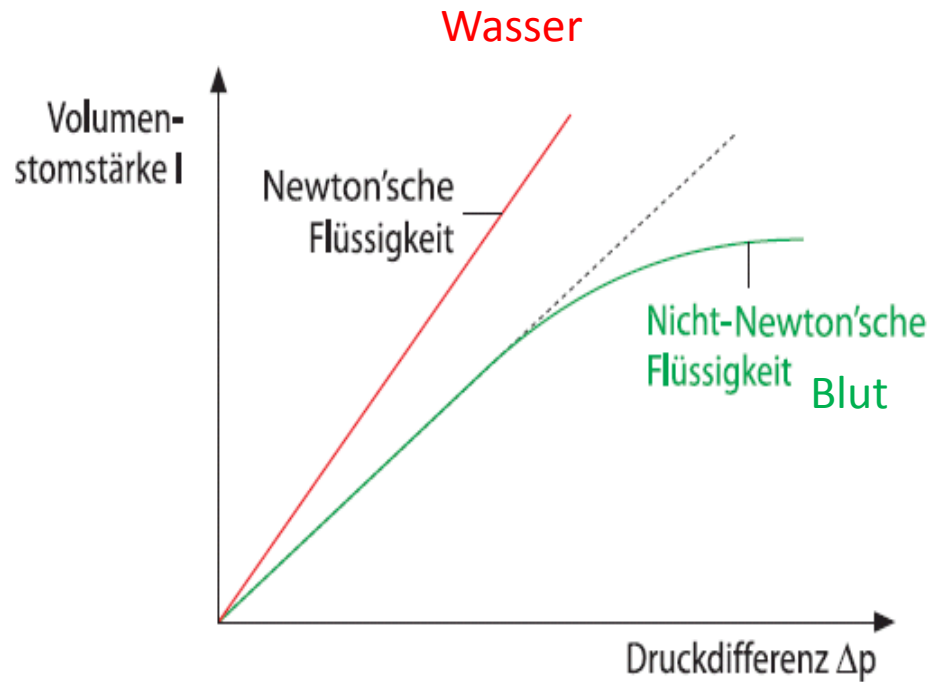
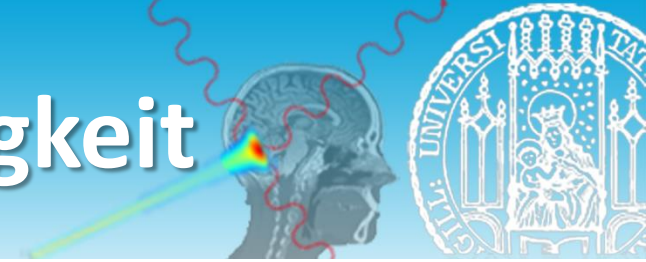
Für den Strömungswiderstand R_s gilt:

$$R_s = \frac{\text{Druckdifferenz } \Delta p}{\text{Volumenstromstärke } I}$$

$$R_s = \frac{\Delta p}{I}$$

$$[R_s] = \text{Ns/m}^5$$

Newtonsche Flüssigkeit

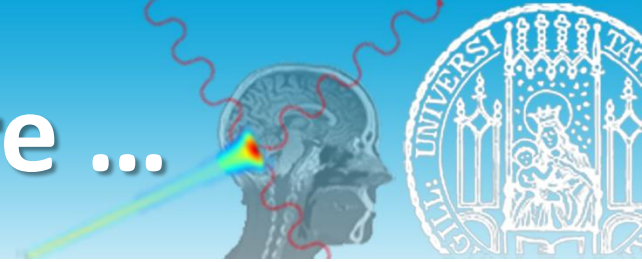


[6]

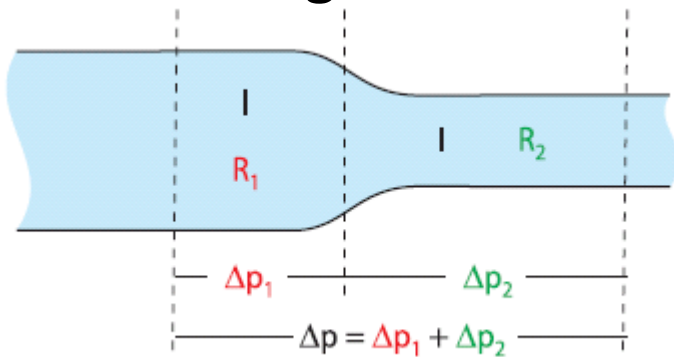
Ist der Strömungswiderstand unabhängig vom Druck p , so spricht man von einer **Newtonschen Flüssigkeit**.

„Ohmsches Gesetz“ der Strömung

$$I = \frac{\Delta p}{R}$$



Serienschaltung von Strömungswiderständen:

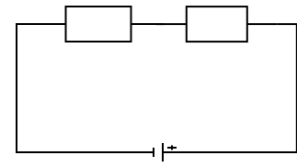


[6]

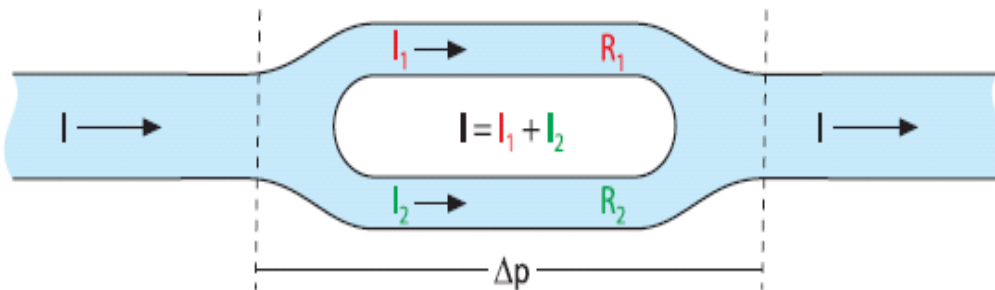
$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$$

$$R_S \cdot I = (R_{S,1} + R_{S,2}) \cdot I$$

$$R_S = R_{S,1} + R_{S,2}$$



Parallelschaltung von Strömungswiderständen:

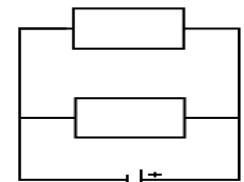


$$I = I_1 + I_2$$

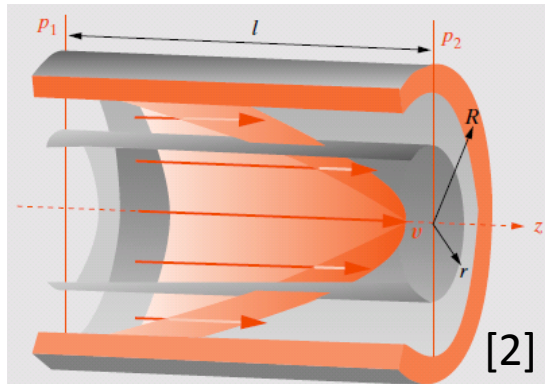
$$\frac{\Delta p}{R_S} = \frac{\Delta p}{R_{S,1}} + \frac{\Delta p}{R_{S,2}}$$

[6]

$$\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_{S,1}} + \frac{1}{R_{S,2}}$$



Hagen-Poiseuillesches Gesetz



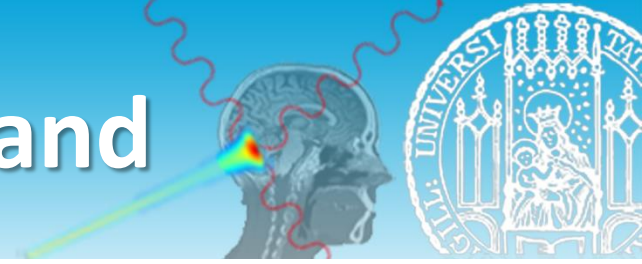
Für den Volumenstrom I einer laminaren stationären Strömung gilt das **Hagen-Poiseuillesche Gesetz**:

$$I = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \cdot \Delta p$$

Der Volumenstrom ist umso größer, je größer die antreibende **Druckdifferenz Δp** und der **Rohr-Radius R** ist (wächst mit der 4ten Potenz!).

Der Volumenstrom ist umso kleiner, je länger das Rohr ist.

Der Volumenstrom ist umso kleiner, je viskoser (mehr Reibung) die Flüssigkeit ist.



Voraussetzungen für die Gültigkeit des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes:

Stationäre, laminare Strömungen

Inkompressible Flüssigkeit mit konstanter Viskosität

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so kann der Strömungswiderstand analog zum ohmschen Gesetz aus dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz bestimmt werden:

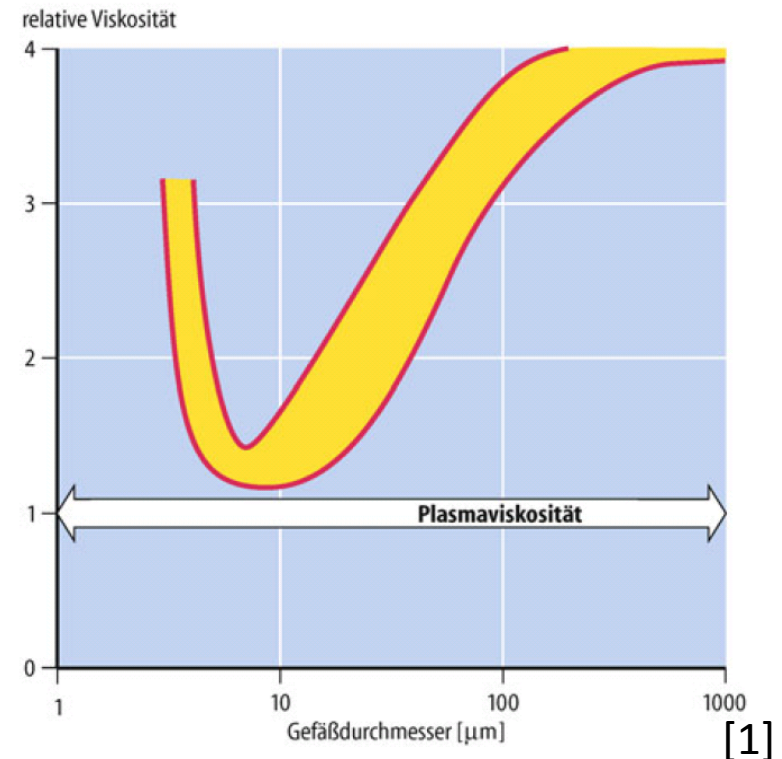
$$R_S = \frac{8\eta}{\pi} \cdot \frac{L}{R^4}$$



Im Gefäßsystem sind die Voraussetzungen für die Gültigkeit des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes nicht erfüllt. Dennoch kann das Hagen-Poiseuillesche Gesetz für quantitative Abschätzungen der Physiologie des Blutkreislaufes verwendet werden.

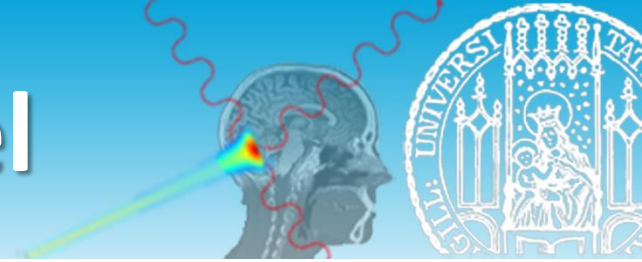
$$R_S \propto \frac{\eta}{R^4}$$

Der Strömungswiderstand ist um so größer, je kleiner der Gefäßdurchmesser und je größer die Viskosität des Blutes ist.



■ Abb. 28.5. Abhängigkeit der Viskosität des Blutes vom Gefäßdurchmesser. Mit fallendem Gefäßdurchmesser nimmt die Viskosität des Blutes (gelb markierter Bereich) ab und erreicht bei 4–10 µm Durchmesser ein Minimum (Fahraeus-Lindqvist-Effekt)

Rechenbeispiel



Einen Bypass für ein Blutgefäß kann man sich als zwei parallel geschaltete Rohre vorstellen.

Durch ein starres Rohr mit kreisförmiger Querschnittsfläche und Durchmesser d_1 von 1,5 mm fließe mit einem Volumenstrom I_1 eine laminare Newtonsche Flüssigkeit. Ein zweites gleich langes starres Rohr mit Durchmesser $d_2=3$ mm wird nun parallel zu dem ersten Rohr dazu geschaltet. Wie ändert sich dann der Volumenstrom beider Rohre, wenn die Druckdifferenz gleich bleibt?

Bei parallel geschalteten Röhren addieren sich die
Kehrwerte der Strömungswiderstände der einzelnen Rohre.

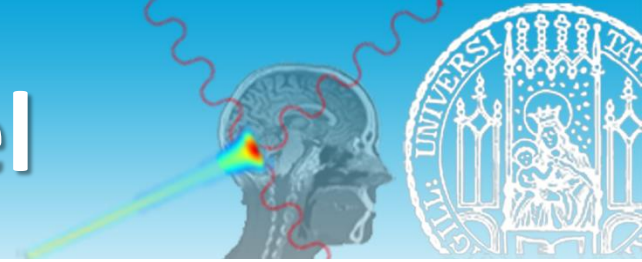
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Da es sich um eine laminare Newtonsche Flüssigkeit handelt, können die Strömungswiderstände aus dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz ermittelt werden.

$$R_1 = \frac{8\eta}{\pi} \cdot \frac{L}{\left(\frac{d_1}{2}\right)^4} = \frac{128\eta}{\pi} \cdot \frac{L}{(d_1)^4}$$

$$R_2 = \frac{128\eta}{\pi} \cdot \frac{L}{(d_2)^4} = \frac{128\eta}{\pi} \cdot \frac{L}{(2d_1)^4} = \frac{1}{16} R_1$$

Rechenbeispiel



Einen Bypass für ein Blutgefäß kann man sich als zwei parallel geschaltete Rohre vorstellen.

Durch ein starres Rohr mit kreisförmiger Querschnittsfläche und Durchmesser d_1 von 1,5 mm fließe mit einem Volumenstrom I_1 eine laminare Newtonsche Flüssigkeit. Ein zweites gleich langes starres Rohr mit Durchmesser $d_2=3$ mm wird nun parallel zu dem ersten Rohr dazu geschaltet. Wie ändert sich dann der Volumenstrom beider Rohre, wenn die Druckdifferenz gleich bleibt?

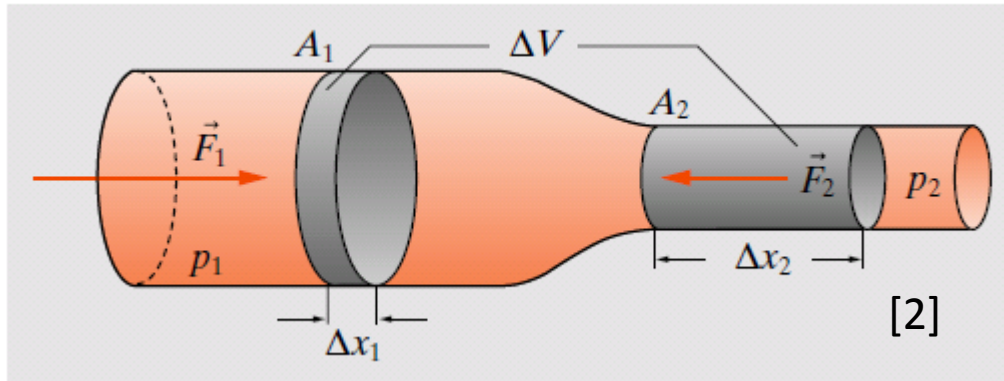
Der Bypass-Durchmesser (d_2) ist doppelt so gross, also $R_{S,2} = \frac{R_{S,1}}{2^4} = \frac{R_{S,1}}{16}$

$$\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_{S,1}} + \frac{1}{R_{S,2}} = \frac{1}{R_{S,1}} + \frac{16}{R_{S,1}} = \frac{17}{R_{S,1}} \rightarrow R_S = \frac{R_{S,1}}{17}$$

Volumenstrom ohne Bypass: $I_1 = \frac{\Delta p}{R_{S,1}}$, Volumenstrom gesamt: $I = \frac{\Delta p}{R_S}$

Für den Gesamt-Volumenstrom gilt also $I = 17 \frac{\Delta p}{R_1} = 17 \cdot I_1$

Bernoulli-Gleichung



Die höhere Geschwindigkeit der Strömung in dem schmaleren Rohrabschnitt bedeutet, dass das Volumenelement ΔV an kinetischer Energie gewonnen hat.

Energieerhaltung:

$$p_1 \cdot \Delta V + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot v_1^2 = p_2 \cdot \Delta V + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot v_2^2$$

Gesetz von Bernoulli:

$$p_{ges} = p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

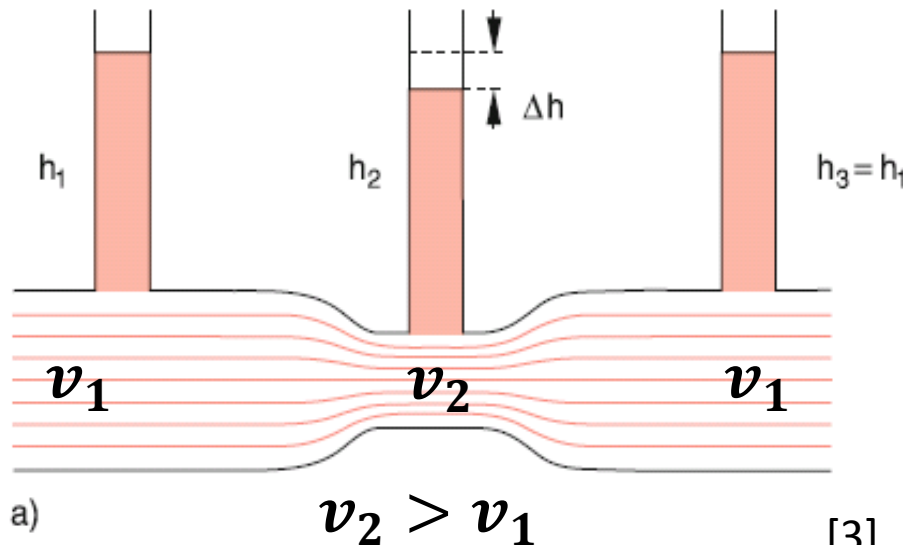
p_0 : statischer Druck
 $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$: Staudruck

Bernoulli-Gleichung



Bernoulli-Gleichung:

$$p_{ges} = p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$



Erinnerung: Kontinuitätsgleichung:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

- a) Da der **Gesamtdruck bei einer reibungsfreien inkompressiblen Flüssigkeit konstant** ist, muss der statische Druck in dem Maß abnehmen, in dem der Staudruck sich an einer Rohrengstelle erhöht. Dies lässt sich anhand der geringeren Steighöhe im zugehörigen Rohr erkennen.

Bernoulli's Taille,
Blätter im Wind
& Wasserbälle

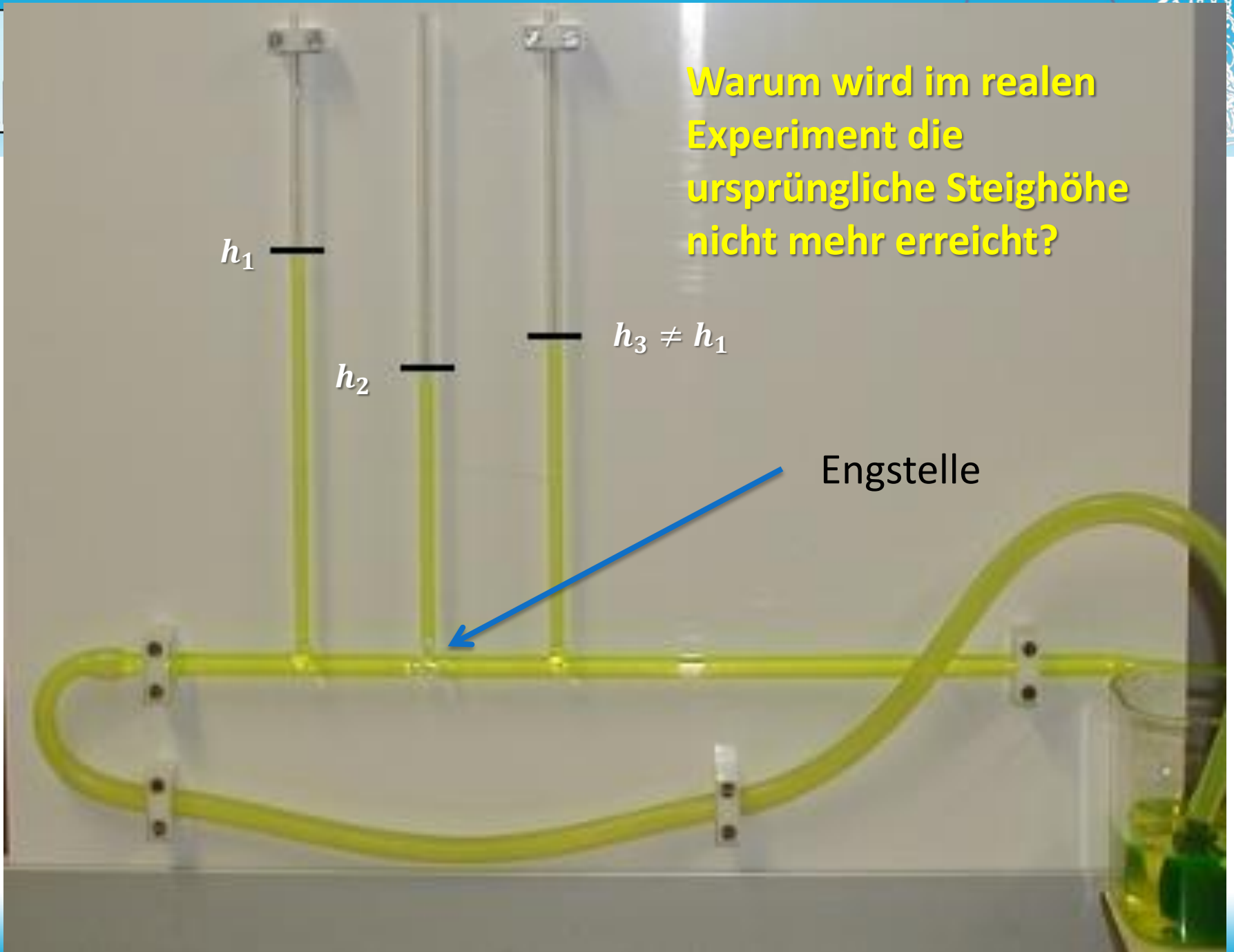
Warum wird im realen Experiment die ursprüngliche Steighöhe nicht mehr erreicht?

h_1

h_2

$h_3 \neq h_1$

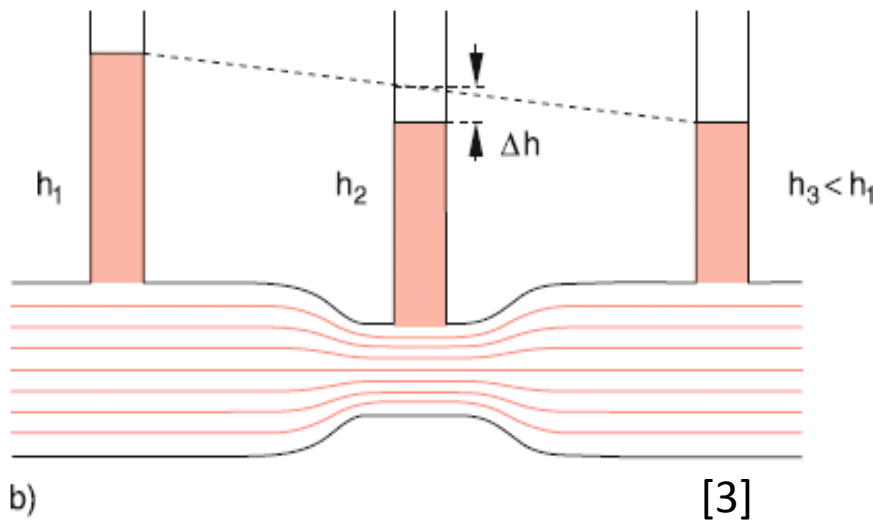
Engstelle





Bernoulli-Gleichung:

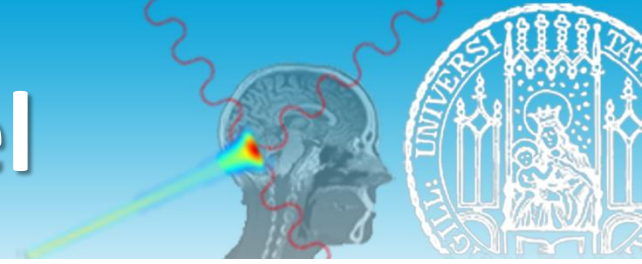
$$p_{ges} = p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$



Bei Flüssigkeiten, bei denen die innere Reibung nicht vernachlässigt werden kann, **nimmt der Druck insgesamt durch Reibungsverluste ab**, d.h. p_{ges} ist dann keine Konstante mehr.

Dennoch nimmt der statische Druck an der Engstelle entsprechend der Erhöhung des Staudruckes ab.

Rechenbeispiel



Im Bereich einer Stenose betrage die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes $v_s = 3 \frac{m}{s}$ und der statische Druck an dieser Stelle sei p_s . Wie groß ist der Druckunterschied $p_0 - p_s$, wenn der statische Druck vor der Stenose p_0 ist und die Strömungsgeschwindigkeit an dieser Stelle vernachlässigt werden kann? Reibung und Schwerkraft können vernachlässigt und das Blut ($\rho = 1 \frac{kg}{L}$) kann als inkompressibel angenommen werden.

Der Gesamtdruck p_{ges} muss vor der Stenose und im Bereich der Stenose gleich groß sein.

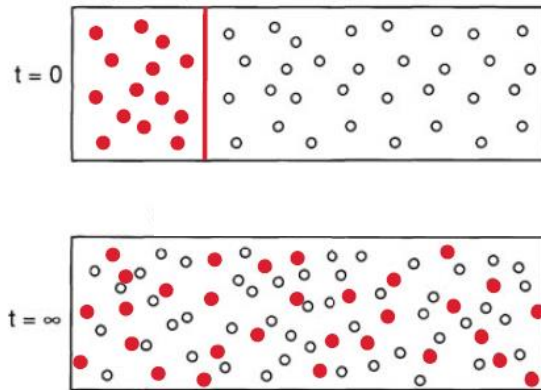
Vor der Stenose $p_{ges} = p_0$

Bereich der Stenose $p_{ges} = p_s + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_s^2$

$$p_0 = p_s + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_s^2$$

$$p_0 - p_s = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_s^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{kg}{10^{-3} m^3} \cdot \left(3 \frac{m}{s}\right)^2 = 4,5 kPa = 31,5 mmHg$$

Diffusion



[3]

Die **Diffusion** sorgt für den Ausgleich von **Konzentrationsunterschieden**. Diffusion erfolgt dabei vom Ort höherer Konzentration zum Ort niedrigerer Konzentration.

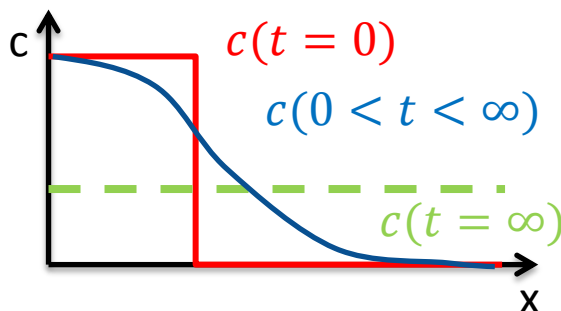
Der Diffusionsstrom I_D ist proportional zum Gradienten der Konzentration $\frac{\Delta c}{\Delta x}$

1. Ficksches Gesetz

$$I_D = -D \cdot A \cdot \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

D: Diffusionskonstante

A: Fläche durch die die Diffusion erfolgt



Osmose



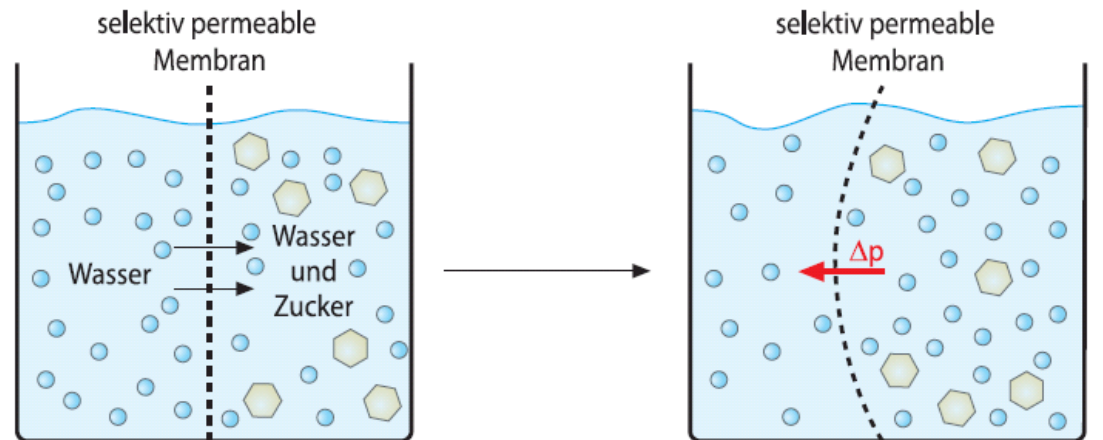
Als **Osmose** wird die **Diffusion** durch eine **selektiv permeable Membran** bezeichnet.

Die **Permeabilität** K_P ist ein Maß für die Geschwindigkeit der Diffusion durch die Membran der Dicke Δx .

$$K_P = \frac{D}{\Delta x}$$

$$[K_P] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

D: Diffusionskonstante



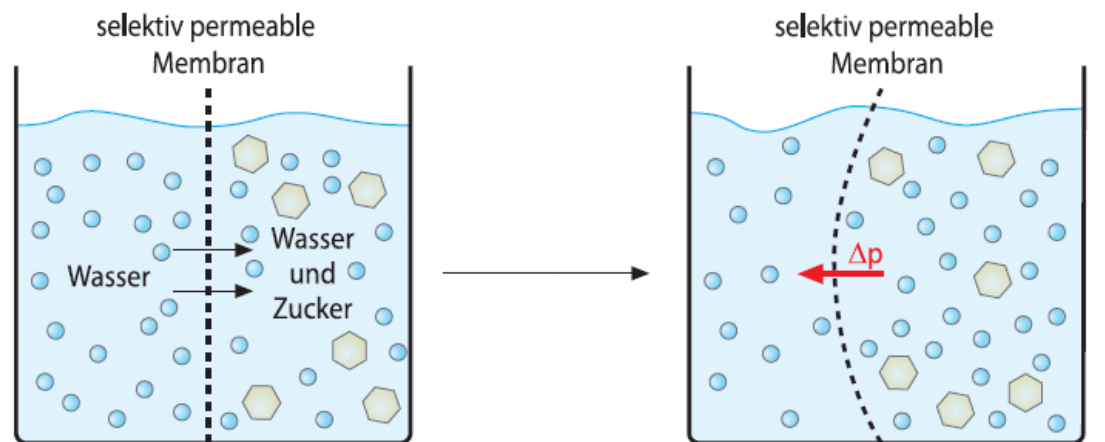
Osmose



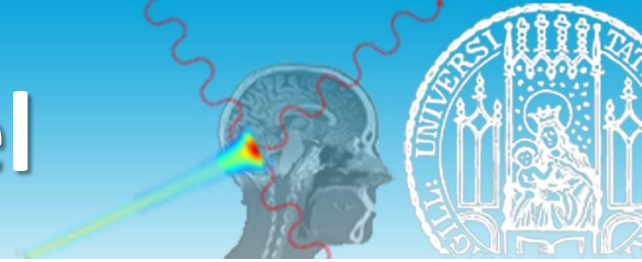
Zu beiden Seiten der selektiv permeablen Membran befinden sich zwei Lösungen unterschiedlicher Konzentrationen. Ist die Membran nur für eines der beiden Lösungsmittel durchlässig so kommt es durch die Osmose zu einer lokalen Druckerhöhung. Der **Grenzwert dieser Druckerhöhung** wird **osmotischer Druck** genannt.

Er berechnet sich mittels der van't Hoff Gleichung:

$$p_{\text{osmotisch}} = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T$$



Rechenbeispiel



Betrachte ein Gefäß in dem eine Lösung durch eine selektiv permeable Membran vom reinen Lösungsmittel getrennt ist. Die Temperatur von Lösung und Lösungsmittel betrage 40 °C. Zwischen Lösung und Lösungsmittel baut sich ein osmotischer Druck von 300 kPa auf. Wie groß ist dann die Stoffmengenkonzentration der Lösung?

$$p_{\text{osmotisch}} = \frac{n}{V} \cdot R_{\text{Gas}} \cdot T$$
$$\frac{n}{V} = \frac{p_{\text{osmotisch}}}{R_{\text{Gas}} \cdot T}$$

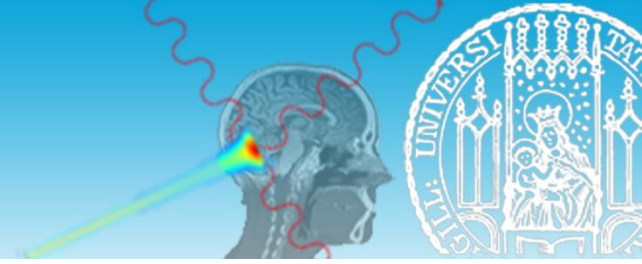
$$p_{\text{osmotisch}} = 300 \text{ kPa}$$

$$R_{\text{Gas}} = 8,3 \frac{\text{N m}}{\text{mol K}}$$

$$T = (40 + 273) \text{ K} = 313 \text{ K}$$

$$\frac{n}{V} = \frac{300 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{8,3 \frac{\text{N m}}{\text{mol K}} \cdot 313 \text{ K}} = 120 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} = 0,12 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

Versuch - FLU



Teil 1: Kugelfallviskosimeter – Viskosität Öl

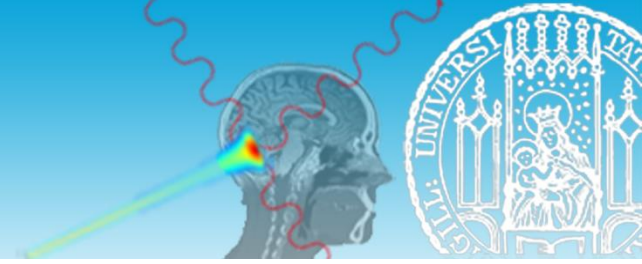
Teil 2: Kapillarviskosimeter – Viskosität Wasser

Teil 3: Abreißmethode – Oberflächenspannung

Teil 4: Doppler-Sonographie – Kontinuitätsgleichung

Teil 6: Osmometer – Diffusionsstrom zwischen Wasser und Glucoselösung

Noch Fragen?



- (1) Schmidt, R.F. (Hrsg.), Physiologie des Menschen mit Pathophysiologie, Springer, 2010
- (2) Meschede, D., Gerthsen Physik, Springer, 2010
- (3) Demtröder, W., Experimentalphysik 1, Springer, 2013
- (4) Povh, B., Anschauliche Physik für Naturwissenschaftler, Springer, 2011
- (5) Harten, U. Physik für Mediziner, Springer, 2011
- (6) Schätz, J. (Hrsg.), Erste Hilfe - Physik und Chemie für Mediziner, Springer, 2012
- (7) Grehn, F., Augenheilkunde, Springer, 2006
- (8) <http://www.physik.uni-wuerzburg.de/physikonline/>